1 Basistransformation

Der folgende Abschnitt soll zum Verständnis des Übergangs von Indexnotation zur Matrixnotation beitragen. Insbesondere wann Zeilen, wann Spaltenvektoren benutzt werden sollen bzw. wann transponierte Matrizen. Die Herleitungen zu den verwendeten Gleichung sind im Skriptum zu finden und werden nicht noch einmal explizit angeschrieben. Zur Konvention: Vektoren werden **fett** und als Kleinbuchstaben geschrieben. Skalare, also Komponenten der Matrizen oder Vektoren normal und mit Kleinbuchstaben und Matrizen mit Großbuchstaben.

1.1 Vektorraum

$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x'^i \mathbf{f}_i$
x^i...i-te Komponente des Vektors in alter Basis
x'^i...i-te Komponente des Vektors in transformierter Basis
$\mathbf{e}_i$...i-ter ursprünglicher Basisvektor
$\mathbf{f}_i$...i-ter transformierter Basisvektor
Achtung: x^i ist hier die Koordinate des Vektors. Der Vektor an sich ($\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$) ist allerdings von der Basis unabhängig. Vgl. Basis: $\mathbf{e}_i$ ist der gesamte Basisvektor

1.1.1 Basisvektoren

Transformation Basisvektoren: $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_j s^j{}_i$ mit $s^j{}_i$...Transformationsmatrix
angewendet: (Einsteinsche Summenkonvention)
$\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 s^1{}_1 + \mathbf{e}_2 s^2{}_1$
$\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 s^1{}_2 + \mathbf{e}_2 s^2{}_2$
woraus in Matrixschreibweise folgt:
$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^1{}_1 & s^1{}_2 \\ s^2{}_1 & s^2{}_2 \end{pmatrix}$
$F = E \cdot S$
Basisvektoren werden als Spaltenvektoren in der Matrix angeschrieben.
Das ganze ist auch mit Zeilenvektoren möglich, dabei muss allerdings die gesamte Gleichung transponiert werden. Diese Konvention ist im Skriptum verwendet.

1.1.2 Komponenten

Aus $\mathbf{x} = F \cdot \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = E \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$ (wie schon in 1.1 in Indexschreibweise erwähnt) folgt:
$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = F^{-1} \cdot E \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$
In Indexschreibweise: $x'^i = (s^{-1})^i{}_k x^k$

1.2 Dualraum

Für Basisvektoren im Dualraum gilt folgende Beziehung:

$$\mathbf{e}_i \cdot \underbrace{\mathbf{e}^j}_{dual} = \mathbf{f}_i \cdot \underbrace{\mathbf{f}^j}_{dual} = \delta_i^j$$

Für das abstrakte Objekt Vektor gilt wieder, dass es von der Basis unabhängig ist: $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}^i = x'_i \mathbf{f}^i$

1.2.1 Berechnung

Man konstruiert die dualen Basisvektoren so, dass obige δ-Beziehung erfüllt ist. Dazu schreibt man die nicht dualen Basisvektoren als Zeilenvektoren in eine Matrix. Die dualen Basisvektoren erhält man dann als Spaltenvektoren der Inversen dieser Matrix.[1]

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \delta^i{}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E^{dual} \cdot E = \mathbb{1} \Rightarrow E^{dual} = E^{-1}$$

1.2.2 Basisvektoren

Transformation Basisvektoren: $\mathbf{f}^i = (s^{-1})_j{}^i \mathbf{e}^j$
angewendet:
$\mathbf{f}^1 = (s^{-1})_1{}^1 \mathbf{e}^1 + (s^{-1})_2{}^1 \mathbf{e}^2$
$\mathbf{f}^2 = (s^{-1})_1{}^2 \mathbf{e}^1 + (s^{-1})_2{}^2 \mathbf{e}^2$
in Matrixschreibweise:
$\begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s^{-1})_1{}^1 & (s^{-1})_2{}^1 \\ (s^{-1})_1{}^2 & (s^{-1})_2{}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix}$
$(F^*)^T = (S^*)^T (E^*)^T$
Hier werden die Basisvektoren in Zeilen eingeben.

1.2.3 Komponenten

$\mathbf{x^T} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 \end{pmatrix} \cdot (F^*)^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot (E^*)^T$
woraus folgt:
$\begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot (E^*)^T \cdot ((F^*)^T)^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot ((S^*)^T)^{-1}$
In Indexschreibweise: $x'_i = x_j s_i{}^j$

1.3 Ko- und Kontravarianz

Wie eventuell schon aufgefallen ist, gibt es eine gewisse Systematik bezüglich dem Hoch- und Tiefstellen der Indizes. Basisvektoren (und Komponenten) mit tiefgestelltem Index[2], heißen kovariant; solche mit hochgestelltem[3] kontravariant.
Das ist deswegen praktisch, weil es Aufschluss über das Transformationsverhalten der Objekte gibt: **ko**variante Objekte transformieren von alter Basis auf neue Basis **mit** der Matrix, **kontra**variante **dagegen**, das heißt mit der Inversen.

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x'^i \mathbf{f}_i = (s^{-1})^i{}_j x^j \mathbf{e}_k s^k{}_i = \underbrace{(s^{-1})^i{}_j s^k{}_i}_{\delta_j{}^k} x^j \mathbf{e}_k = x^j \mathbf{e}_j$$

Hier zeigt sich wieder, dass die abstrakten Objekte "Vektoren" basisunabhängig sind.

[1] Man kann natürlich auch die nicht-dualen in Spalten anschreiben, erhält dann aber die dualen als Zeilen.
[2] Das heißt Komponenten der dualen Basis und Basisvektoren der nicht-dualen Basis.
[3] Komponenten in nicht-dualer Basis und Basisvektoren der dualen Basis