1 Green'sche Funktion

Green'sche Funktionen sind ein wichtiges Hilfsmittel zum Lösen inhomogener linearer partieller Differentialgleichungen

$$\mathcal{L}_x y(x) = f(x) \tag{1}$$

wobei $\mathcal{L}_x$ ein Differentialoperator. Die Greensche Funktion $G(x,x')$ des Differentialoperators $\mathcal{L}_x$ erfüllt die Gleichung

$$\mathcal{L}_x G(x,x') = \delta(x-x')\,. \tag{2}$$

Für die Lösung $y(x)$ gilt

$$y(x) = \int_{\mathbb{R}} G(x,x') f(x') dx' \tag{3}$$

da

$$\mathcal{L}_x y(x) = \mathcal{L}_x \int_{\mathbb{R}} G(x,x') f(x') dx' = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}_x G(x,x') f(x') dx' = \int_{\mathbb{R}} \delta(x-x') f(x') dx' = f(x) \tag{4}$$

Für Operatoren der Form $\mathcal{L}_x = \sum_n a_n \frac{d^n}{dx^n}$ mit Konstanten a_n kann $G(x,x')$ mit Hilfe der Fourier-Transformation berechnet werden:

$$\mathcal{L}_x G(x,x') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{G}(k)(\mathcal{L}_x e^{ik(x-x')}) dk = \delta(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ik(x-x')} dk \tag{5}$$

Die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{G}(k)(\mathcal{L}_x e^{ik(x-x')}) dk = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ik(x-x')} dk \tag{6}$$

kann nur für alle x, x' erfüllt werden, wenn die Integranden der beiden Integrale gleich sind.

$$\Rightarrow \tilde{G}(k)(\mathcal{L}_x e^{ik(x-x')}) = e^{ik(x-x')} \tag{7}$$

Mit

$$\mathcal{L}_x e^{ik(x-x')} = e^{ik(x-x')} \sum_n a_n (ik)^n = e^{ik(x-x')} p(k) \tag{8}$$

wobei $p(k) = \sum_n a_n (ik)^n$ ein Polynom der Variable k ist, kann man schreiben:

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{p(k)} \tag{9}$$

$$\Rightarrow G_I(x,x') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ik(x-x')}}{p(k)} dk \tag{10}$$

mit dem Subscript I, um explizit darauf hinzuweisen, dass man hier eine Partikulärlösung erhält. Das Integral wird in die komplexen Zahlen erweitert und mithilfe des Residuensatzes gelöst.
$x > x' \rightarrow$ oberer Halbkreis harmlos, $H(x-x')$
$x' > x \rightarrow$ unterer Halbkreis harmlos, $H(x'-x)$
Mit

$$g(x,x',k) = \frac{e^{ik(x-x')}}{p(k)} \tag{11}$$

gilt

$$G_I(x,x') = \frac{1}{2\pi} 2\pi i \left[H(x-x') \sum_{ob.HK} Res_{(k)}(g(x,x',k)) - H(x'-x) \sum_{unt.HK} Res_{(k)}(g(x,x',k)) \right] \tag{12}$$

mit dem Subscript (k), um anzudeuten, dass die Residuen bzgl. k berechnet werden, weil in Gleichung (10) nach k integriert wird. Das „$-$“ in Gleichung (12) erhält man, weil man bei dem Hilfsweg der unteren Halbebene im mathematisch negativen Umlaufsinn integriert. Die allgemeine Green'sche Funktion erhält man mittels

$$G(x,x') = G_I(x,x') + AG_H(x,x') \tag{13}$$

wobei $G_H(x,x')$ Lösung von $\mathcal{L}_x G_H(x,x') = 0$ ist. Die Konstante A wird so gewählt, dass $G(x,x')$ die Randbedingungen erfüllt. Die Lösung der Differentialgleichung (1) erhält man schließlich mithilfe von Gleichung (3).